UNIVERSIDAD DEL MAGDALENA

FACULTAD DE INGENIERIA
INGENIERIA INDUSTRIAL
GRUPO DE INVESTIGACION – ESTADISTICA Y METODOS CUANTITATIVOS

INFORME SUSTENTACION – PASANTIA DE INVESTIGACION

PROBLEMAS DE BANCARROTA

"APLICACIÓN DE REGLA CEL A LOS MBC"

JEFRY ALDIVER QUINTANA SIERRA
LAURA MANUELA ARISTIZABAL CASTAÑO

DIRECTOR DE PASANTIA
ING. RICK KEEVIN ACOSTA VEGA

SANTA MARTA, MAGDALENA 2021

1. INTRODUCCION

En este informe se pretende resumir la información general utilizada en el artículo realizado durante la pasantía de investigación enfocada en los problemas de bancarrota de múltiples estados con demandas cruzadas. Inicialmente se conoce como un problema de bancarrota aquella situación en la que hay que repartir un bien escaso cuya cantidad es suficiente para satisfacer la demanda de aquellos que reclaman este bien.

Este tipo de problemas son muy comunes en situaciones reales de repartición de recursos como la quiebra de empresas, herencias u optimización, los cuales pueden ser modelados mediante estos problemas. Para la resolución de estos problemas es necesario seguir una serie de reglas, las cuales no son más que maneras eficientes de lograr la repartición de nuestro bien y, por ende, cada una se rige por unas propiedades determinadas que la hacen única. Entre estas reglas se destacan la proporcional, regla de ganancias igualitarias y regla de perdidas igualitarias, regla de Talmud y regla de llegada aleatoria.

Seguidamente se mencionan los problemas de bancarrota de múltiples estados ya que son un tipo de problema de gran importancia pues presenta la misma situación de un problema de bancarrota tradicional con el adicional de poseer varios bienes a repartir. Luego, se realiza un avance más presentando los problemas de bancarrota de múltiples estados con demandas cruzadas, los cuales son una evolución de los anteriores ya que adiciona la característica particular de que un agente pueda reclamar a más de un estado a la vez.

Finalmente, se detallan los resultados obtenidos de manera general en el desarrollo de la pasantía de investigación y se mencionan detalles cruciales en la realización de la misma.

2. PROBLEMA DE BANCARROTA

Los problemas de bancarrota se caracterizan por tener una estructura matemática común, esta surge cuando el conjunto de las reclamaciones de los agentes involucrados cuya demanda, derechos o reclamaciones supera el presupuesto disponible de un bien perfectamente divisible (dinero, agua, etc.), para brindar una solución al problema se requiere de un análisis matemático, grafico e individualizado de dichas reglas, para así determinar cuál es la regla más adecuada para brindarle solución a cada problema.

O´Neill (1992) presenta un convincente modelo matemático del problema de bancarrota. Propone varias metodologías para adjudicar reclamaciones conflictivas, y deriva en una serie de reglas sobre la base de estas metodologías.

Definición 2.1. Un problema de bancarrota es una tripleta (*N, E, d*), donde *E* € $\mathbb{R}_+$ es el estado o bien disponible a dividir entre los agentes, *d*= ($d_{1,,,,,,,,,}$ d_N) € $\mathbb{R}_+^N$ es el vector de demandas de los agentes, con un conjunto de *n* elementos, $\mathbb{N} = \{1,,,,n\}$ siendo $|N| \geq 2$, d_i es la demanda del agente $i, \forall i \in \mathbb{N}$ y además se cumple que $d(N) \geq E$ y $\Sigma_{iEN}\, d_i > 0$.

Representaremos el problema de bancarrota por el par (E, d), cuando no de lugar a confusión el conjunto de agentes.

Definición 2.2. Dado un problema de bancarrota (E, d), una solución es una función que asigna a cada problema de bancarrota un reparto $x \in \mathbb{R}^N$ tal que:

1) $x(N) = E$
2) $0 \geq x_i \geq d_i, \forall i \in N$

2.1. JUEGOS DE BANCARROTA

Es un problema de bancarrota (E, d), una solución pesimista de reparto es asignar a una coalición de agentes S lo que puede conseguir, esto es *E* - $d\left(\frac{N}{S}\right)$*, es decir, la diferencia de reparto en el estado y las demandas de los agentes que no forman parte de la coalición* S*, entre N /* S, habiendo recibido cada uno de ellos la cantidad que demanda (sin superarla). En el caso de que esta diferencia sea 0, no sobre nada al dar a N / S todos los que demandan, la coalición de agentes S, tendrá asignada un pago 0 y no inferior ya que el pago de cada agente no puede ser negativo. A continuación, usaremos la definición de O'Neill (1992).

Dado un problema de bancarrota (E, d), se define el juego de bancarrota,

$(\mathbb{N}; v_{Ed}) \in G^N$, como:

$V_{Ed}(s) = max\left(E - d\left({}^{N}/_{S}\right),0\right), \forall S \subset N.$

Una forma de dar una definición de juego de bancarrota optimista para los jugadores seria

$$\vec{v}_{\epsilon_1}\, d(s) = \min(d(S), E), \forall i \in s, s \subset N$$

Al conjunto de juegos de bancarrota con conjunto de jugadores N lo denotaremos por $GB^N \subset G^N$.

Dado $v_{E,d} \in GB^N$, se tiene:

$$V_{E,d}(N) = E$$

$$V_{E,d}(\{i\}) = max\{E - d\,(N\,/\,\{i\}),0\} \leq d_i, \forall i \epsilon N$$

$$v_{Ed}(N\,/\,\{i\}) = \max\{\mathrm{E} - \mathrm{d_i} 0\} \forall i \epsilon N$$

3. REGLAS CLASICAS DE PROBLEMAS DE BANCARROTA

Las reglas de bancarrota son procedimientos lógicos creados para dar solución a cualquier problema de bancarrota, los cuales, asocian una solución para cada problema en particular.

Si establecemos a B^Ncomo la familia de problemas de bancarrota con N agentes.

Según Villar (2005), una regla de bancarrota, R, es una función $R: B^N \to \mathbb{R}_+^N$ que asigna a cada problema (E, d) de B^N asocia un único punto $R(E, d) \in \mathbb{R}_+^N$ que verifica las siguientes condiciones:

1. $d_i \geq R_i(E, d) \geq 0, \forall\, i \in N.$
2. $\sum_{i \in N} R_i(E, d) = E.$

En donde debemos interpretar a $R(E, d)$ como una forma deseable en la que se reparta el estado E entre el conjunto de agentes N involucrados. Por ende, se interpreta como la forma razonable de distribuir E.

En esta definición, se establece que las reglas de bancarrota proporcionan soluciones que pertenecen al núcleo de los juegos de bancarrota asociados a dichos problemas. Donde se denomina a RB^Ncomo el conjunto de reglas de bancarrota con conjunto de jugadores N.

(Curiel, Maschler y Tijs, 1987). Para cualquier $R \in RB^N$ y para cada $(E, d) \in B^N$ se tiene que $R(E, d) \in C(v_{E,d})$, donde $v_{E,d}$ es el juego de bancarrota asociado a (E, d).

La primera condición establece que ningún agente N puede recibir una cantidad superior a lo que demanda E ni menor que cero. No puede haber un agente que, al esperar recibir una cantidad estipulada de un bien, acabe entregando parte de dicho bien.

La segunda condición es resultado del requisito de eficiencia: dado que el monto total a repartir de la cantidad de bien disponible E no es capaz de cubrir las demandas a reclamar por todos los agentes, se debe distribuir en su totalidad.

Una vez definida las condiciones básicas de las reglas de bancarrota, se puede hablar de los diferentes tipos de reglas en sí, las cuales se agrupan según su naturaleza a la hora de repartir. Las tres primeras: proporcional, la de ganancias igualitarias y perdidas igualitarias se caracterizan por su principio igualitario, pero se diferencian en la forma en la que igualan sus montos a la hora de repartir. La cuarta regla, la regla de Talmud, aplica criterios según la demanda y el estado que se tenga. Y, por último, la regla de llegadas aleatorias, tiene como criterio asignaciones secuenciales.

3.1. REGLA PROPORCIONAL

La regla proporcional, P, trata de resolver los problemas mediante un reparto equitativo de la cantidad de bien disponible E, es decir, que cada agente reciba una proporción del estado.

Esta regla se define de la siguiente manera. Para todo $(E, d) \in B^N$, la regla proporcional, P, viene dada por:

$$P(E, d) = E\,\frac{d}{D}.$$

Estas son las propiedades que cumple la regla P: Simetría, Anonimato, Progresividad, Monotonía respecto a las demandas, Aditividad de las demandas, Monotonía respecto al estado, Supermodularidad, Aditividad del estado, **(Thomson, W., 2003)**, Conservación del orden, Consistencia y consistencia bilateral, **(Aumann y Maschler, 1985)**, Transferencia ventajosa, Transferencia no ventajosa, Composiciones hacia arriba y hacia abajo **(Chun, 1988)**, Consistencia inversa

3.2. REGLA DE GANANCIAS IGUALITARIAS

La regla de ganancias igualitarias, CEA, busca igualar las cantidades de bien disponible E entre los agentes, sin que llegue a superar la cantidad demandada por cada agente. Esta regla privilegia a las cantidades reclamantes bajas, ya que reciben toda su demanda o reciben la misma cantidad que los demás agentes con demandas más altas.

Esta regla se define de la siguiente manera. Para todo $(E, d) \in B^N$, la regla de ganancias igualitarias, CEA, viene dada por:

$$CEA_i(E, d) = min\{d_i, \propto\}, \forall\ i \in N,$$

Donde $\propto$ es el único número real no negativo que verifica $\sum_{i \in N} CEA_i(E, d) = E.$

Estas son las propiedades que cumple la regla CEA: Seguridad mínima, Simetría, Anonimato, Conversación del orden, Regresividad, Invarianza bajo truncación y conformidad con la teoría de juegos cooperativos, Monotonía respecto a las demandas, Transferencia ventajosa, Monotonía respecto al estado, Supermodularidad, Composiciones hacia arriba y hacia abajo, Consistencia y consistencia bilateral y Consistencia inversa.

3.3. REGLA DE PERDIDAS IGUALITARIAS

La regla de perdidas igualitarias, CEL, da prioridad a los agentes con mayores demandas, esta regla busca repartir el estado asignando una cantidad que depende de las demandas no recibidas del conjunto de agentes, De modo que la perdida en relación con la demanda de los agentes sea la misma para todos, bajo la condición de que la asignación no sea negativa.

Esta regla se define de la siguiente manera. Para todo $(E,d) \in B^N$, la regla de perdidas igualitarias, CEL, viene dada por:

$$CEL_i(E,d) = max\{d_i - \propto, 0\}, \forall\, i \in N,$$

Donde $\propto$ es el único número real que verifica $\sum_{i \in N} CEL_i(E,d) = E.$

Estas son las propiedades que cumple la regla CEL: Exención, Exclusión **(Herrero y Villar, 2001)**, Compensación vacía, Compensación completa, **(Herrero y Villar, 2002)**, Progresividad, Derechos mínimos primero, Simetría, Anonimato, Conservación del orden, Monotonía respecto a las demandas, Transferencia ventajosa, Monotonía respecto al estado, Supermodularidad, Composiciones hacia arriba y hacia abajo, Consistencia y consistencia bilateral y Consistencia inversa

Esta regla fue la que se escogió para el enfoque de nuestro estudio de investigación para ser adaptado y aplicado según los problemas de bancarrota con reclamos cruzados, los cuales se explicaran posteriormente.

3.4 REGLA DE TALMUD

La regla de Talmud es un procedimiento de reparto diseñado para acomodar las soluciones numéricas que aparecen en el talmud relativas a la resolución de una serie de problemas prácticos muy específicos, relacionados con herencias. Fue propuesta por Aumann y Maschler (1985), tras una primera contribución pionera de O'Neill en 1982.

Esta regla se define de la siguiente manera. Para todo $(E,d) \in B^N$, la regla Talmud, TAL, verifica que $TAL(E,d)$ es la única solución de bancarrota CG-consistente, viene dada por:

$$TAL(E,d) = \begin{cases} CEA\left(E, \frac{d}{2}\right), & si\ E \leq \frac{D}{2} \\ \frac{d}{2} + CEL\left(E - \frac{D}{2}; \frac{d}{2}\right) & si\ E \geq \frac{D}{2} \end{cases}$$

Estas son las propiedades que cumple la regla TAL: Derechos mínimos primero, Seguridad mínima, Simetría, Anonimato, Conservación del orden, Invarianza bajo truncación y conformidad de la teoría de juegos cooperativos, Monotonía respecto a las demandas, Transferencia ventajosa, Monotonía respecto al estado, Supermodularidad, Composiciones hacia arriba y hacia abajo, Consistencia y consistencia bilateral y Consistencia inversa.

3.5. REGLA DE LLEGADA ALEATORIA

La regla de llegada aleatoria, RA, es una regla en la que se asigna según el promedio que se pueda obtener, es decir, si todos los agentes aparecen uno por uno al azar, se entrega el mínimo de la cantidad igual a su demanda y el remanente. Esto significa que la regla de llegada aleatoria es una regla de asignación en la que cada demandante recibe la expectativa de sus compensaciones marginales, pero no exactamente.

Esta regla se define de la siguiente manera. Para todo $(E, d) \in B^N$, la regla de llegadas aleatorias, RA, viene dada por:

$$RA_i(E,d) = \frac{1}{|N|!} \sum_{\pi \in \theta_N} min\left\{d_i, max\left\{E - \sum_{j \in N: \pi(i) < \pi(j)} d_j\right\}\right\}, \forall\, i \in N.$$

Estas son las propiedades que cumple la regla RA: Derechos mínimos primero, Seguridad mínima, Simetría, Anonimato, Conservación del origen, Invarianza bajo truncación y conformidad con la teoría de juegos cooperativos, Monotonía respecto a las demandas, Transferencia ventajosa, Monotonía respecto al estado y Supermodularidad.

4. PROBLEMAS DE BANCARROTA DE MULTIPLES ESTADOS

Un problema de bancarrota de múltiples estados MB es una secuencia de cuatro elementos (M, N, E, C), donde $M = \{1,2, \dots, m\}$ es el conjunto de estados a repartir, N es el conjunto de reclamantes, $E \in \mathcal{R}_+$ es la cantidad de estado perfectamente divisible para repartir y $C \in \mathcal{M}_x^+$ es la matriz de los reclamos de cada agente. MB significa la familia de todos estos problemas. Cada fila en C representa los reclamos por un problema como un elemento genérico de C, c_{ij} , denota la cantidad de estados de i que reclama a j. La noción misma del problema MB requiere que $\sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} > E$.

Una regla de bancarrota de múltiples problemas MB es un mapeo R que se asocia con cada $(M, N, E, C) \in MB$ una matriz única $R\ (M, N, E, C) \in M\, m \times n$ tal que:

1. $0 \le R_{ij}\ (M, N, E, C) \le c_{ij}$, para todo $(i, j) \in M \times N$.
2. $\sum_{i \in M} \sum_{j \in N} R_{ij}\ (M, N, E, C) = E$.

La matriz $R\ (M, N, E, C)$ representa una forma óptima de dividir E entre los agentes en N, de acuerdo con los estados en M. Los requisitos establecidos en los MB son una adaptación de los requisitos de un problema de bancarrota normal, por ende, el primer requisito establece que cada agente debe recibir un pago por cada estado correspondiente que no sea inferior a 0 y esté limitado anteriormente por su reclamo. El segundo requerimiento es que se debe asignar la cantidad total de estados disponible. Estos dos requisitos implican que $R\ (M, N, E, C) = C$ siempre que $\sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} = E$.

4.1 PROBLEMAS DE BANCARROTA DE MULTIPLES ESTADOS CON RECLAMOS CRUZADOS

Un problema de bancarrota de múltiples problemas con reclamos cruzados MBC es una secuencia de cinto elementos definidos como (M, N, E, c, α) la cual se caracteriza principalmente porque los agentes pueden tener reclamaciones en más de un estado a la vez. Una regla para problemas de bancarrota de múltiples problemas con reclamos cruzados es un mapeo R que se asocia con cada (M, N, E, c, α) un vector único $R\ (M, N, E, c, \alpha) \in\ R^N$, tal que:

1. $0 \leq R_i(M, N, E, c, \alpha) \leq ci, \qquad para\ todo\ i \in N.$
2. $\sum_{i \in N} \delta(i, j) R_i(M, N, E, c, \alpha) \leq e_j \qquad para\ todo\ j \in M$, donde:

$$\delta(i, j) = \begin{cases} 1\ si\ \ j \in \alpha(i) \\ 0\ en\ otro\ caso. \end{cases}$$

El primer requisito establece que cada agente se le asignara como máximo su reclamo, pero no una cantidad inferior a 0. El segundo requisito determina que ningún estado puede superar su e_j. Por lo tanto, el vector $R\ (M, N, E, c, \alpha)$ representa una asignación a reclamantes que es simultáneamente factible para todas las propiedades.

5. RESULTADOS

De acuerdo a la investigación realizada en esta pasantía pudimos contrastar fuentes bibliográficas sobre problemas de bancarrota de múltiples estados con demandas cruzadas aplicadas en diversos escenarios matemáticos, además de comparar diferentes artículos cuyas aplicaciones involucraban otras reglas y modelos en situaciones enfocadas a la repartición equitativa y justa de recursos, más concretamente en recursos hídricos, ya que el motivo de nuestro trabajo es aterrizar el modelo realizado a un contexto regional cuya problemática se cierne sobre la escases de agua en los acuíferos circundantes para satisfacer la demanda sectorial en la ciudad.

De esta manera, pese a que el documento se encuentra en un ochenta por ciento de su finalización, nos encontramos con que los datos recolectados son satisfactorios para la implementación teórica de la regla CEL, ya que cumplen con los requisitos básicos que demanda un problema de bancarrota de múltiples estados con demandas cruzadas. Por otro lado, también se realizó la búsqueda de las propiedades que se adapten a nuestro modelo de manera que logren cumplir con los objetivos propuestos, entre las cuales se destacan las propiedades de continuidad, monotonicidad, Igual trato entre iguales, preservación del orden, composición hacia arriba y hacia abajo, entre muchas otras las cuales se detallan y explican matemáticamente en el documento. Sin embargo, pese a la labor investigativa que soporte el fundamento matemático del modelo junto con sus propiedades, hemos presentado dificultades a la hora de su realización y adaptación.

Finalmente, como resultados personales podemos mencionar que los pasantes logramos crecer como investigadores mediante este trabajo, ya que nos dio la oportunidad de ser críticos y selectivos con la información requerida, además de poder aplicar los conocimientos adquiridos en los cursos de seminario dictados por la universidad en el transcurso de la carrera en lo que a manejo de base de datos y bibliografía se refiere. También, fue un proceso cognitivo fructífero, dado que se logró el aprendizaje de una herramienta fundamental para la redacción y publicación de artículos de investigación como lo es LaTeX.

6. BIBLIOGRAFIA

Acosta, K., Algaba, E., Sanchez-Soriano, J. (2020). *Multi-issue bankruptcy problems with crossed claims*. Universidad Miguel Hernandez de Elche.

Aumann, R.J., Maschler, M. (1985). *Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud*. Journal of Economic Theory 36, 195–213.

Chun, Y. (1988). *The proportional solution for rights problem*. Mathematical Social Sciences 15, 231–246.

Curiel, I.J., Maschler, M., Tijs, S.H. (1987). *Bankruptcy Games*. Zeitschrift für Operations Research 31, 143–159.

Domínguez, R. (2021). *Capitulo III Problemas de bancarrota*; from TFG *Problema de bancarrota.* Universitat de Barcelona, pp.20-23.

Gutierrez et al. (2017). *Caracterizacion, diagnostic y analisis de vulnerabilidades y amenazas en el departamento del Magdalena – Inundaciones.* CORPAMAG – Universidad del Atlantico.

Herrero, C., Villar, A. (2001). *The three musketeers: four classical solutions to bankruptcy problems*. Mathematical Social Sciences 42, 307–328.

Herrero, C., Villar, A. (2002). *Sustainability in Bankruptcy Problems*. University of Alicante. TOP 10(2), 261–273.

Janjua, S., Hassan, I. (2020). *Transboundary water allocation in critical scarcity conditions: a stochastic bankruptcy approach.* Journal of Water Supply: Research and Technology-Aqua 69, 224–237.

Madani, K. (2010) *Game theory and water resources.* Journal of Hydrology 381, issues 3-4, 225-238.

Mianabadi et al. (2014). *A New bankruptcy method for conflict resolution in water resources allocation.* Journal of Environmental Management 144, 152-159.

O'Neill, B. (1982). *A problem of rights arbitration from the Talmud*. Mathematical Social Sciences 2, 345–371.

Rivero, J. (2018). *Reglas de bancarrota*; from TFM *El problema de bancarrota*. Universidade da Coruña, pp.13-29.

Rodney, B. (2011). *The river sharing problem: A review of the technical literature for policy economists.* Groupe Sup de Co La Rochelle, MPRA paper No. 34382.

Thomson, W. (2003). *Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: a survey*. Mathematical Social Sciences 45, 249–297.

Villar, A. (2005). *Cómo repartir cuando no hay bastante*. Lecturas de Economía 62, pp.9-34.